DS n° 1 Correction

Exercice 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$

2) $\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$

3) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$

4) $\exists!\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$

5) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) \leq M \\ \text{et} & \\ \exists a \in \mathbb{R}, & M = f(a) \end{cases}$

6) $\exists u, v \in \mathbb{R}, \quad u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$

Exercice 2

1 F   2 V   3 V   4 V   5 F   6 F.

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} 5x - 1 = +\infty \quad$ donc $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} 5x - 1 = -\infty \quad$ donc $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 5$

On s'intéresse au signe de f'.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 3x^2 + 5 > 0$ donc f est strictement croissante

3) $f(0) = 0^3 + 5 \times 0 - 1$

$\boxed{f(0) = -1}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5}{2} - 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{20}{8} - \frac{8}{8}$

$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}}$

4) On sait que :

* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
* La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
* $f(0) < 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leq b$

d'un côté, $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \frac{b+a}{2}$

de l'autre côté $\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \leq b$

Donc $\boxed{a \leq \frac{a+b}{2} \leq b}$

$a^2 \leq ab$

$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{ab}$

$|a| \leq \sqrt{ab}$

$a \leq \sqrt{ab}$

) $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$

(on rappelle que $a \geqslant 0$)

De même,

$ab \leq b^2$

$\sqrt{ab} \leq |b|$

$\sqrt{ab} \leq b$.

Donc $\boxed{a \leq \sqrt{ab} \leq b}$

(2) Un nombre divisible par 2 est de la forme $2p$ $(p \in \mathbb{N})$.

* Cas n pair

$n = 2q$ donc $n(n+1) = 2q(2q+1)$

$= 2 \times \underbrace{(q(2q+1))}_{\in \mathbb{N}}$

Donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

* n est impair

$n = 2q+1$ donc $n(n+1) = (2q+1)(2q+1+1)$

$= (2q+1)(2q+2)$

$= 2\left[(2q+1)(q+1)\right]$

$= 2p$ avec $p = (2q+1)(q+1)$

Donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

Exercice 5

① La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$

donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geq 1$

$\ln(x^2+1) \geq \ln(1) = 0$ | la fonction ln est strictement croissante.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0}$

② La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$ $1+x^2>0$

Donc $g'(x)$ est du signe de $2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de g	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

③ • $g(0)=0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty$

• $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

On procède de la même façon pour la limite en $-\infty$.

④ Soit $y \in \mathbb{R}$

Si $y<0$ il n'y a pas de solutions au vu de la question 1 et 2

Si $y=0$: l'équation à une unique solution $\boxed{x=0}$

Si $y>0$ $\ln(1+x^2)=y$

$\Leftrightarrow$ $1+x^2=e^y$

$\Leftrightarrow$ $x^2=e^y-1$ On rappelle que $e^y-1>0$

$\Leftrightarrow$ $x=\pm\sqrt{e^y-1}$

Dans ce dernier cas, l'équation $g(x) = y$ a deux solutions

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{e^y - 1} \; ; \; \sqrt{e^y - 1} \right\}}$$

5) On pose la fonction $h : x \longmapsto g(x) - x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = g'(x) - 1$$

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$h'(x) = \frac{-(1 - 2x + x^2)}{1+x^2}$$

$$h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; h'(x) \leqslant 0}$$

La fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de h	$\searrow$	0	$\searrow$

Au vu du tableau de variations, on déduit que

$\forall x \in]-\infty ; 0[$, $\quad h(x) > 0$

$$g(x) - x > 0$$

$$g(x) > x$$

La courbe g est au-dessus de la droite d'équation $y = x$

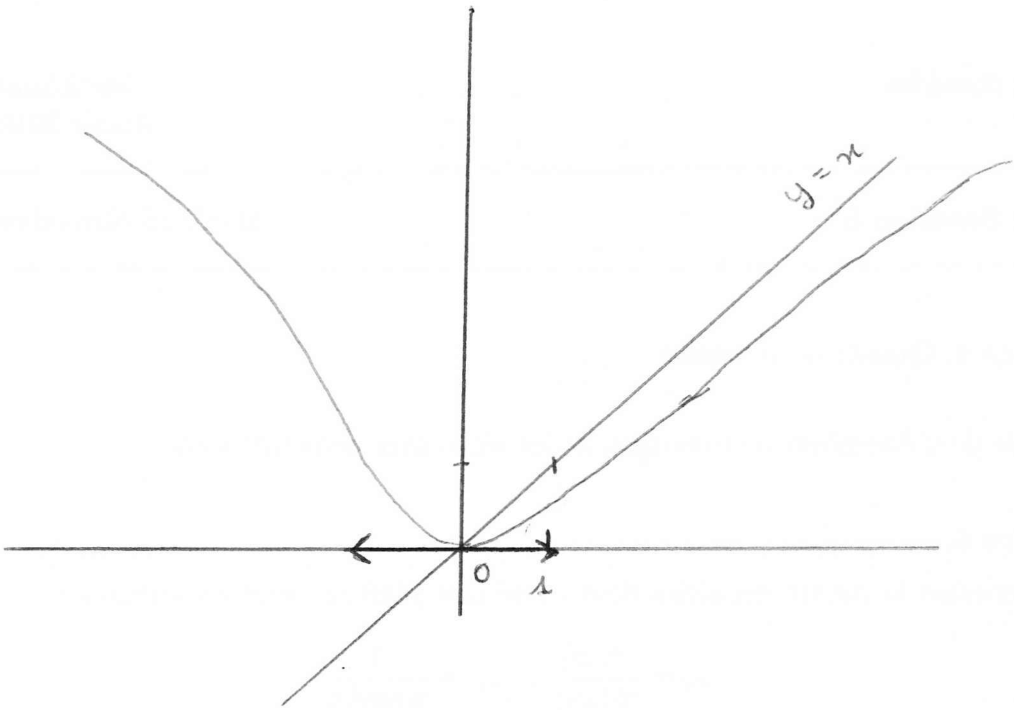
$\forall x \in]0 ; +\infty[$ $\quad h(x) < 0$

$$g(x) < x$$

La courbe g est en dessous de la droite d'équation $y = x$.

6

⚠ Fonction symétrique.



Exercice 6

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} - e^{-x} = e^{x}(1 - e^{-2x})$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0$

donc on s'intéresse au signe de $1 - e^{-2x}$

$$1 - e^{-2x} > 0$$
$$1 > e^{-2x}$$
$$\ln(1) > -2x$$
$$0 > -2x$$
$$\boxed{x > 0}$$

Donc $\forall x > 0$, $1 - e^{-2x} > 0$ et $e^{x} - e^{-x} > 0$

On note $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*}$

2) a) f est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur D.

$\forall x \in D \qquad \boxed{f'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}}$

Or $\forall x \in D$ $e^{x} - e^{-x} > 0$ (question 1)
$e^{x} + e^{-x} > 0$ (exponentielle)

Donc $\forall x \in D \quad \boxed{f'(x) > 0}$

La fonction f est strictement croissante.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x}-e^{-x} = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty\end{array}\right\} \text{Donc } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x}-e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0		$+\infty$
signe de f'		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(b). - La fonction f est continue sur D comme sommel et composée de fonctions continues.

- La fonction f est strictement croissante sur D.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists!\ \alpha \in D$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.

On cherche $\ln\left(e^{x} - e^{-x}\right) = 0$

$$e^{x} - e^{-x} = 1$$

$$e^{x} - e^{-x} - 1 = 0$$

$$e^{-x}\left(e^{2x} - 1 - e^{x}\right) = 0$$

Comme $e^{-x} \neq 0$, $\quad e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$ $\quad$ On pose $X = e^{x}$

et on obtient $\quad X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 1$ $\qquad X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$\Delta = 1 + 4$

$\Delta = 5$

Or $X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $e^x \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Il reste $e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) := \alpha}$$

c) L'équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse α est

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) \qquad f(\alpha) = 0.$$

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha).$$

$$f'(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \qquad \text{or} \quad \ln\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = 0$$

donc $e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 1$

$$f'(\alpha) = e^{\alpha} + e^{-\alpha}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \cancel{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})} + \frac{4}{2(1+\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(-\frac{2(1-\sqrt{5})}{4}\right)$$

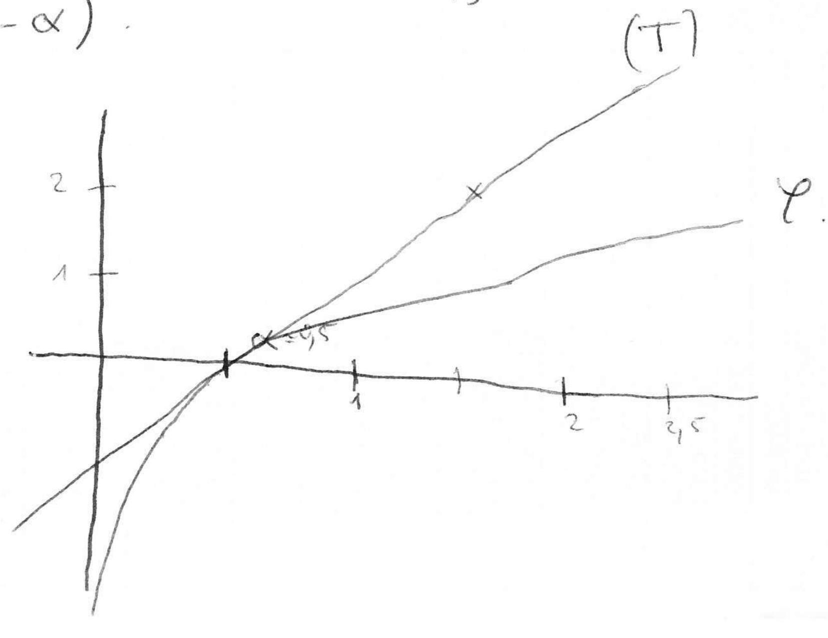
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{5}(x-\alpha).$$

(3)



Exercice 7

On va montrer que :

Si $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $b = 0$.

On suppose que $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

c'est à dire $a + b\sqrt{2} = \frac{c}{d}$ avec $PGCD(c,d) = 1$.
$c, d \in \mathbb{Z}$

On suppose également que $b \neq 0$

alors
$$b\sqrt{2} = \frac{c}{d} - a$$
$$b\sqrt{2} = \frac{c - ad}{d}$$
$$\sqrt{2} = \frac{c-ad}{bd}$$
car $b \neq 0$

Or $c - ad \in \mathbb{Z}$
$bd \in \mathbb{Z}$

Donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Absurde !

Par conséquent $b = 0$

$\boxtimes$